

# **ОГРАНИЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ**

**Федотов Н. А.**, аспирант,  
**Ковалев С.В.**, д.т.н., доцент,  
**Ковалева О.А.**, д.т.н., доцент,  
ФГБОУ ВО ТГУ Г.Р. Державина, г. Тамбов, Россия

**Аннотация.** В статье рассматривается задача многокритериального выбора мембранного оборудования в условиях интервальной неопределённости. На примере были продемонстрированы ограничения классического метода критерия Гурвица, который при свёртке интервальных оценок не способен выявить катастрофические провалы. Результаты обосновывают необходимость дополнения классических критериев метриками катастрофических провалов и перехода к многокомпонентным подходам при интервальной неопределённости.

**Ключевые слова:** многокритериальный выбор, интервальная неопределенность, критерий Гурвица, мембранное оборудование

Современные производства всё чаще сталкиваются с необходимостью технического перевооружения с целью обновления оборудования или наращивания мощностей производства. В рамках технического перевооружения важное место занимает выбор мембранного оборудования. Мембранные технологии широко применяются в различных отраслях производства: водоочистка, пищевая, химическая и фармацевтическая. От выбора того или иного оборудования зависят экономическая эффективность и качество выпускаемой продукции.

Задача выбора оборудования осложняется тем, что приходится проводить сложный многокритериальный анализ, при котором нужно учитывать

множество факторов. Кроме того, если оценивать оборудование в условиях производственных процессов значения критериев могут быть заданы не детерминировано. Разброс характеристик, погрешности измерений, нестабильность технологических режимов приводят к тому, что исходные данные представляются в виде интервалов возможных значений. Такая форма описания называется интервальной неопределённостью и требует особых подходов к многокритериальному анализу.

В теории принятия решений для учёта неопределённости разработано множество методов. Одним из классических методов является критерий Гурвица, который позволяет лицу, принимающему решение (ЛПР), задать коэффициент оптимизма и тем самым сбалансировать ориентацию на наилучший или наихудший исход. Критерий Гурвица широко применяется в задачах с точечными данными, однако при интервальной неопределённости его использование через свёртку интервалов в интегральные оценки. Данная свертка может привести к потере важной информации. Например, компенсация низких значений по одним критериям за счёт высоких по другим может замаскировать наличие катастрофических провалов - ситуаций, когда по критически важному для выбора параметру альтернатива оказывается неприемлемо плохой. Это является серьёзной проблемой, требующей детального анализа.

Критерий Гурвица относится к группе критериев принятия решений в условиях неопределённости, которые используют взвешенную комбинацию наихудшего и наилучшего исходов [1,2]. Пусть для каждой альтернативы  $A_i$  известны минимально возможный (пессимистический) выигрыш  $u_i^{min} = L_i$  и максимально возможный (оптимистический) выигрыш  $u_i^{max} = U_i$ . Тогда значение критерия Гурвица для альтернативы  $A_i$  определяется как:

$$H_i(\alpha) = \alpha U_i + (1 - \alpha)L_i$$

где  $\alpha \in [0;1]$  - коэффициент оптимизма, выбираемый ЛПР в зависимости от предпочтения. Если коэффициент оптимизма  $\alpha = 1$ , то критерий соответствует полному оптимизму (ориентация на наилучший исход), если  $\alpha =$

0, то коэффициент соответствует полному пессимизму (критерий Вальда) [3,4]. Для применения критерия Гурвица необходимо предварительно получить интервальные оценки, взвешенные суммы нормализованных интервалов с весами, определёнными объективным методом (CRITIC, учитывающий высокий порог корреляции  $|r| > 0,7$ ) [5,6]. На заключительном этапе для выбранных значений коэффициента оптимизма вычисляются  $H_i(\alpha)$  и определяется лучшая альтернатива. Лучшей альтернативой считается та, которая максимизирует функцию  $H_i(\alpha)$ .

В классической постановке задачи многокритериального анализа при интервальной неопределённости каждая альтернатива описывается вектором интервалов  $[x_{ij}^L; x_{ij}^U]$ . Такие традиционные методы как взвешенная сумма, критерий Гурвица, TOPSIS и другие методы обычно преобразуют интервалы в детерминированные оценки или вычисляют интегральные интервальные оценки  $[L_i; U_i]$ , которые затем подвергаются свёртке [7,8]. При таком подходе теряется уникальная информация о распределении значений по частным технико-экономическим критериям. В частности, если альтернатива имеет очень высокие показатели по большинству критериев, но по одному из них её нижняя граница равна нулю, то интегральная оценка может оставаться высокой за счёт «усреднения» с другими критериями. Это приводит к выбору альтернативы, которая в определённых условиях эксплуатации становится самой неэффективной, возможно, по самому важному критерию. Подобное явление можно называть катастрофическим провалом.

Проблема заключается в том, что классические методы, встречающиеся в зарубежной и отечественной литературе, включая критерий Гурвица, не имеют механизмов обнаружения подобных провалов. ЛПР, полагаясь на полученные результаты, может выбрать оборудование, которое при неблагоприятной реализации неопределённости окажется не эффективным. В связи с этим возникает необходимость в разработке и обосновании методов, которые учитывают не только интегральную эффективность, но и сбалансированность профиля альтернативы, и отсутствие нулевых гарантированных значений.

Для демонстрации ограничений критерия Гурвица был проведен численный эксперимент с реальными данными оборудования (Таблица 1). Исходными данными для решения задачи многокритериального выбора является множества альтернатив МГА-70 ( $A_1$ ), МГА-80 ( $A_2$ ), МГА-90 ( $A_3$ ), МГА-95 ( $A_4$ ), МГА-100 ( $A_5$ ) и частных критериев, которые вместе формируют исходную матрицу решений (Таблица 1). Критерии представляют собой систему взаимосвязанных технико-экономических критериев: удельный выходной поток ( $K_1$ ), коэффициент задержания по растворённому веществу ( $K_2$ ), фильтрующая площадь разделения ( $K_3$ ), масса материала аппарата ( $K_4$ ), скорость раствора в трансмембранном канале ( $K_5$ ), стоимость материала ( $K_6$ ), толщина межмембранного канала ( $K_7$ ).

Таблица 1 – Исходная интервальная матрица решений

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$
$A_1$	600; 1050	0,595; 0,714	0,269; 0,280	7,39; 8,00	0,450; 0,535	2826; 5063	0,95; 1,05
$A_2$	360; 630	0,680; 0,816	0,222; 0,231	12,25; 13,27	0,315; 0,375	4683; 8390	2,38; 2,63
$A_3$	210; 367,5	0,765; 0,918	0,241; 0,251	12,47; 13,51	0,378; 0,449	4767; 8541	1,90; 2,10
$A_4$	150; 262,5	0,765; 0,918	0,267; 0,277	11,25; 12,19	0,423; 0,503	4301; 7706	1,43; 1,58
$A_5$	60; 105	0,829; 0,994	0,225; 0,235	11,62;12, 58	0,351; 0,417	4176;748 2	1,43; 1,58

Прежде чем найти решения с помощью Критерия Гурвица необходимо рассчитать интегральные оценки эффективности для каждой альтернативы, основанных на весовых коэффициентах критериев  $W$  и нормализованных значениях:

$$[L_i, U_i] = \left[ \sum_{j=1}^7 W_j x_{ij}^{L'}, \sum_{j=1}^7 W_j x_{ij}^{U'} \right]$$

Таким образом, получаются значения интегральной оценки эффективности каждой альтернативы, которые необходимы для расчета критерия Гурвица (Таблица 2).

Таблица 2 – Интегральные интервальные оценки альтернатив

Альтернатива	Наихудший исход ( $L_i$ )	Наилучший исход ( $U_i$ )
$A_1$	0,5526	0,8574
$A_2$	0,1244	0,4330
$A_3$	0,2228	0,5183
$A_4$	0,3529	0,6266
$A_5$	0,2487	0,5036

Из Таблицы 2 видно, что альтернатива  $A_1$  является самой лучшей для ЛПР. Для репрезентативности результата были проверены границы интервала 0 и 1 (полный пессимизм и полный оптимизм) и середина 0,5 (нейтралитет). Результаты расчета критерия Гурвица при разных коэффициентах оптимизма представлены в Таблице 3.

Таблица 3 – Значения критерия Гурвица для различных  $\alpha$

Коэффициент $\alpha$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	Лидер
0 (пессимизм)	0,5526	0,1244	0,2228	0,3529	0,2487	$A_1$
0,5 (нейтралитет)	0,7050	0,2787	0,3706	0,4898	0,3762	$A_1$
1 (оптимизм)	0,8574	0,4330	0,5183	0,6266	0,5036	$A_1$

Из Таблицы 3 видно, что при любом коэффициенте оптимизма  $\alpha \in [0;1]$  альтернатива  $A_1$  выигрывает. Такой результат связан с тем, что обе границы интервала  $A_1 [L_1; U_1]$  выше соответствующих границ остальных альтернатив. При подобных условиях критерий Гурвица всегда будет выбирать альтернативу  $A_1$  как наилучшую.

Причина ложного выбора заключается в том, что критерий Гурвица, как и другие классические методы, использующие свёртку интервальной оценки, усредняет значения по всем критериям. Высокие показатели альтернативы  $A_1$  по критериям  $K_1, K_3, K_5, K_6, K_7$  компенсируют нулевой вклад критерия  $K_2$ , благодаря чему интегральная оценка остаётся высокой. Критерий Гурвица не имеет механизма, который бы «штрафовал» альтернативу за наличие хотя бы одного катастрофически низкого значения по отдельно взятому критерию.

Анализ альтернативы  $A_4$ , показал, что она имеет более низкие интегральные оценки и обладает положительными нижними границами по всем критериям. С такими усредненными значениями альтернатива  $A_4$  имеет более сбалансированный профиль чем другие альтернативы. Если применить комбинированный подход оценки альтернатив, который подразумевает

абсолютную эффективность, близость к центру Парето-фронта и внутреннюю сбалансированность альтернативы, то альтернатива  $A_4$  будет являться достаточно устойчивым решением.

Результаты эксперимента наглядно показали проблему критерия Гурвица, которая заключается в игнорировании нулевых гарантированных оценок альтернатив по частным критериям. Для решения выявленной проблемы рекомендуется ввести механизм дополнительной фильтрации альтернатив по пороговым значениям критериев до использования критерия Гурвица.

Для обеспечения качества принятого решения необходимо использовать более современные подходы многокритериального анализа, дающие многокомпонентную оценку альтернатив. Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку комбинированных подходов, учитывающих абсолютную эффективность альтернативы, а также её сбалансированность профиля и отсутствие катастрофических провалов.

### Литература

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
2. Keeney R.L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. – Cambridge University Press, 1993. – 569 p.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: пер. с англ. Вачнадзе Р.Г. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
4. Tzeng, G.H. and Huang, J.J. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. – CRC Press, Boca Raton, 2011. – 335 p.
5. Diakoulaki D., Mavrotas G., Papayannakis L. Determining objective weights in multiple criteria problems: The CRITIC method // Computers & Operations Research. – 1995. – Vol. 22, №7. – pp.763–770.
6. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (eds.) Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. – Springer, 2005. – 1048 p.

7. Zimmermann H.J. Fuzzy Set Theory – and Its Applications. – 4th ed. – Springer Dordrecht, 2001. – 514 p.
8. Dubois D., Prade H. Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. – Plenum Press, 1988. – 263 p.